Akademisk Afhandling

Om ett vidsträktare bruk af Qvadrat- och Rutetalens tabell,

hvilken

med Vidtberömda Filosofiska Fakultetens tillstånd

och under Præsidium

af

Mag. CARL JOH. Ds. HILL,

Math. Professor, R. N. O., L. K. V. A.,

ACAD. LUGD.BAT. BIBL.

för

Filosofiska Doktorsgraden

utgifves

af

CARL DANIEL EDUARD PETRÉN,

Filos. Kand., af Östgötha Nation, E. O. Amanuens vid Univers. Biblioth., V. D. M.

att offentligen försvaras

å Mathematiska Lärosalen den 10 Juni 1850.

III.

Lund,
tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,
1850.

liks tabell och alla dylika får man ihogkomma, att värdena på N ej äro ordnade efter deras naturliga storlek, utan efter deras kropp eller hundraden, så att om $N = \varepsilon|\delta\gamma|\beta\alpha = \varepsilon$ myriader $+ \delta\gamma$ hundra $+ \beta\alpha$; så står

$\delta\gamma$ = 00	01	02	03	. . .	98	99
på pag. 2 . . 5	6 . . 9	10 . . 13	14 . . 17	. . .	394 . . 397	398 . . . 401

med förutsatt $\varepsilon = 0, 1, 2, 3 \ldots 9$ på hvarje blad i öfversta raden, samt de sista siffrorne $\beta\alpha = 00, 01, \ldots 49$ eller $= 50, 51, \ldots 99$ i första spalten på hvartannat blad, om vi härmed förstå de 2 sidorne tillsammans, som på en gång ligga uppslagna. Kuliks tabell saknar dock det dubbla argumentet. — Med dessa eller dylika qvadrat-tabeller och tillhörande rute-tabeller kunna allahanda *räkningar med stora tal* ofantligen förkortas, såsom vi skola visa efter anteckningar under Præsidis föreläsningar.

Qvadrat- och Rute-tabellernas bruk

I) Till qvadrering

a) af ett tal < tabellens gräns: Uppslå qvadraten enligt förklaringen af tabellens inrättning.

Ex. 1. (ur mindre tabellen, hvars gräns är 100 . . . = den vid noten om cubiska eq:s lösning): $67^2 = 4489$.

Ex. 2. (ur Præsidis eller Schulzes 3-siffriga tabell II. p. 282, 3): $674^2 = 454276$.

Ex. 3. (ur Barlows tabell): $6748^2 = 45535504$. (Math. Tables 1814. Stereot. 32).

Ex. 4. (ur Ludolfs (i Tetragonometria Tabularia) eller Jahns tabell): $72481^2 = 5253495361$.

b) af ett tal, som har en siffra (x) mera än tabellens.

℞ 1). α) Om denna (x) är < 5, så är $(a \,.\, 10 + x)^2 = a^2 \,.\, 100 + (2x) \,.\, a \,.\, 10 + x^2$, der man blott har att multiplicera a med en enkel siffra ($2x$) och med 10.

$$\text{Ex. 1) } 674^2 = (670 + 4)^2 = 670^2 + 8 \,.\, 670 + 4^2 = \begin{Bmatrix} 4489|16 \\ +53\;60 \end{Bmatrix}$$

$$674^2 = 4542\;76.$$

$$\text{Ex. 2) } \begin{array}{r|l} 674 & 3^2 = 454276|09 \\ \times\, 6 & +\quad 404\;4 \\ \hline & = 454680\;49. \end{array}$$

β) Är den deremot $= > 5$, så tages således dess fyllnad i 10 negativ.

$$\text{Ex. 3) } 6748^2 = (6750-2)^2 = \left.\begin{matrix} 675^2 \,.\, 10^2 + 2^2 \\ -4 \,.\, 6750 \end{matrix}\right\} = \begin{array}{r|l} 455625 & 04 \\ -270 & 00 \end{array}$$

Således . . . . $6748^2 = 455355\;04.$

Följer man deremot α), så blir räkningen:

$$\text{Ex. 4.}\quad 674^2|8^2 = \begin{array}{r|l} 454276 & 64 \\ 674 & \end{array}$$
$$674.6 = \quad 404\ 4$$
$$= 455355\ 04.$$

Dervid Factorn 6 = 2.8—10, och summan af de 2 första talen = 674_1^2 = 454950| kan tagas ur proniktabellen. Således blir räkningen:

$$674_1^2 = 454950|64 = 8^2$$
$$674.6 = \quad 404\ 4$$
$$6748^2 = 455355\ 04.$$

Hvarvid också blott multiplication med en enkel siffra, neml. 6 = den sista i 2.8, förekommer. Eller i linea med *W* förekommer 2.674 = 1348, som man blott behöfver multiplicera med 8 (den sista).

Anm. Särdeles är $(a + \frac{1}{2})^2 = a^2 + a + \frac{1}{4} = a_1^2 + \frac{1}{4}$ eller också = $\frac{1}{2}((a+1)^2 + a^2) - \frac{1}{4}$ (= $\frac{1}{4}$ mindre än medlet af de 2 nästa qvadrattalen); således (genom $\times$ 10^2) $(10\,a + 5)^2 = a_1^2 . 100 + 25 = \frac{(a+1)^2 + a^2}{2} . 100 - 25$, när $x = 5$.

$$\text{Ex. 5.}\quad 675^2 = \tfrac{1}{2} . \begin{pmatrix} 4624 \\ 4489 \end{pmatrix} . 100 - 25 = 455625,$$

som annorledes $= 67^2 . 10^2 + 670 . 10 + 5^2 = \begin{array}{r|l} 4489 & 25 \\ +67 & \end{array} = 4556|25 = 67_1^2|5^2$.

Dervid medlet lätt finnes, om man märker, att det af 4 + 4 är 4, af 4 + 6 är mellansiffran 5, af $8 + 2 = 2 + \frac{8-2}{2} = 5$, af $4 + 9 = 4 + \frac{9-4}{2} = 6\frac{1}{2}$, samt $\frac{100}{2} - 25 = 25$.

℞ 2). α) Om sista siffran (x) är jemn = $2y$, så är $(10a + x)^2 = (10a + 2y)^2 = a^2 . 100 + ((a + y)^2 - (a - y)^2) . 10 + x^2$.

$$\text{Ex. 6.}\quad \begin{array}{c} 674^2 \\ \pm 2| \end{array} = 67^2 . 10^2 + (69^2 - 65^2) . 10 + 4^2 = \begin{array}{r|l} 4489 & 16 \\ +53 & 6 \end{array}$$
$$= 4542\ 76$$

(som 69^2 & 65^2 stå nära hvarandra i Tabellen, utskrifver man ej dem, utan blott deras skillnad 536).

β) Är den deremot udda, så minskar man med 1 och qvadrerar enligt det föregående, samt gör $(V + 1)^2 = V^2 + 2\,V + 1 = V^2 + W + 1$ eller $= V_1^2 + V + 1$.

$$\text{Ex. 7.}\quad 675^2 = 674^2 + 1349 = \begin{Bmatrix} 454276 \\ +1349 \end{Bmatrix}$$
$$= 455625.$$

Ex. 8. $377^2 = 1369|36\ (= 37^2 00 + 6^2)$
$\pm 3|$ $\quad 44\ 4.\ (= 40^2 - 34^2).10$
$\quad 7\ 53\ (= 2.376 + 1)$
$= 1421\ 29.$ Eller så:

Ex. 9. $3773^2 = (377|2 + 1)^2 = 142129|04$
$\quad + 150\ 81\ (= 4.3770 + 1)$
$\quad + 75\ 44 = W$
$\quad = 142355\ 29.$

℞ 3). Man kan ock (fast med mindre fördel) begagna följande allmänna sätt *c*:

$$\text{såsom } 377|3^2 = \left\{\begin{array}{r|l} 142129 & 09 \\ +14213 & 8 \\ -13987 & 6- \end{array}\right\} = \text{id.}$$

Eller hellre formlen $(a\,.\,10 + b)^2 = a^2\,.\,100 + (b^2\,.\,10 + b^2) + (a^2 - (a-b)^2)\,.\,10$.

Ex. 10. Med Schulzes eller Præs. tabell:

$$\begin{array}{l} a\ \ b \qquad\quad a^2 \qquad b^2 \\ 674|8^2 = 454'276|64 \\ \qquad\qquad + \ \ 6|4 + = b^2.10 \end{array}\Big\}\ \text{(eller sammanslås genast)}$$

$674^2 - 666^2 = a^2 - (a-b)^2 = +10'72\ 0+$ (som utskrifves genast)
gör $= 455\,355\ 04.$

c) Qvadraten af ett tal, som har omkring dubbelt så många siffror som tabellens, erhålles enligt formlen $(a\,.\,t + b)^2 = a^2 t^2 + (a^2 + b^2 - (a-b)^2)\ t + b^2$, der t är gränstalet $= 100$, 1000 eller 10000 eller 100000. Denna formel härledes lätt af den kända $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$, genom att derur taga $2ab$ och insätta i en dylik med at för a *).

Ex. 1. $(67|48)^2 = 4489|2304 = a^2 t^2 + b^2, \quad t = 100$
$\qquad\qquad 67\ 93 = (a^2 + b^2)\, t$
$-(67-48)^2 = -19^2 = -3\ 61- = -(a-b)^2\, t$
således är $6748^2 = 4553\ 5504.$

Ex. 2. $\overset{a}{582}'\overset{b}{169}{}^2 = (\overset{a^2}{338'724'})(\overset{b^2}{028'561})\ \ (t = 1' = 1000)$
$(a^2 + b^2)' = 367'\ 285' \quad (t^2 = 1'' = 1 \text{ million})$
$-'(a-b)^2 = -413^2.' = -170'\ 569-$
$582169^2 = 338\,920'\ 744\,561.$

---

*) Enligt den är nemligen dels (vid undra tecknet) $(a-b)^2 + 2\,ab = a^2 + b^2$ (enligt Eucl. II: 7), och således $2\,ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2$, och dels $(at + b)^2 = (at)^2 + 2\,(at)\,b + b^2 = a^2 t^2 + 2\,ab\,.\,t + b^2 = a^2.t^2 + (a^2 + b^2 - (a-b)^2)\,t + b^2$. — Derföre utskrifves först a^2 och b^2 och sammanställas i 1:a raden, så att a^2 åtföljes af dubbelt så många siffror, som t har nollor, och således blir multipicerad med t^2, så sammanläggas a^2 & b^2 (der de nu stå), och summan ställes i andra ra-

Eller med *Barlows* 4-siffriga tabell:

$$\begin{array}{rr|ll}
 & a^2 & b^2 & \\
5821|69^2 = & 33884041 & 4761 & \\
 & 338888 & 02 & = a^2 + b^2 \\
-5752|^2 \ldots & -330855 & 04 & = -(a-b)^2 \\
\hline
 & = 33892074 & 4561. &
\end{array}$$

(Fordrar räkning med större tal, såvida man ej ur tabellen genast kan utskrifva $a^2-(a-b)^2$, såsom i Ex. 10).

Ex. 3. Begäres qvadraten

$$5145|304^2 = 26\,474153\,|252{,}416,$$

$$\text{men med 5-siffrig tabell} = 51453|04^2 = \left\{\begin{array}{r|l} 2647411209 & 00{,}16 \\ + & 16, \\ +4116 & 08, \end{array}\right.$$

(med 4-siffrig tabell)

Ex. 4. $3284|0936^2 =$

$$= \left\{\begin{array}{r|l} 10784656 & 00876096 \\ +1166 & 0752 \\ -551 & 3104\ - \end{array}\right.$$
$$= 10785270\ 77356096.$$

Anm. Stundom kan man genom att afsöndra den 1:a eller sista siffran, eller genom att taga b negativ $= -B$, bringa räkningen till mera enkelhet.

Ex. 5. Om $2^{32} = 42949|67296$, hvad är 2^{64}?

Svar: efter $2^{32} = AT-B$, om $A = 42950$, $B = 32704$, $T = 100'000$, och $A-B = 10246 = 10^4 + 246$, $(A-B)^2 = \begin{array}{r|l} 1 & 0492 \\ 6 & 0516 \end{array}$, så är (med 4-siffrig tabell) $2^{64} = A^2T^2 + ((A-B)^2 - A^2 - B^2)\,T + B^2 =$

$$\begin{array}{r|r|l}
= 1844702500 & \left(\begin{array}{r|l} 10692 & 900'16 \\ 2 & 616\,.\,. \end{array}\right) & = A^2T^2 + B^2 \\
1049 & 80516 & = (A-B)^2\,.\,T \\
-29142 & 54116 & = -(A^2+B^2)\,.\,T \\
\hline
1844674407' & 37095\ 51616. &
\end{array}$$

Men med 5-siffriga tabellen blir räkningen:

$$\begin{array}{rr|l}
42949|67296^2 = & 1844616601 & 4528751616 \\
 & +63733 & 68217 \\
-24347^2 = - & 5927 & 76409\quad - \\
\hline
2^{64} = & 1844674407 & 3709551616.
\end{array}$$

d) Qvadraten af ett tal med 3 eller 4 gånger så många siffror (eller än flere) fås genom att oftare använda föregående formel; nemligen

---

den så, att den blir multiplicerad med t, och derunder i samma decadrum $(a-b)^2$ med minus; hvarefter allt sammanlägges enligt tecknen. (Vid behof ifyllas derföre nollor mellan a^2 och b^2).

$$(AT+B)^2 = A^2 . T^2 + (A^2+B^2-(A-B)^2)\,T + B^2$$

och $A^2 = (at+b)^2 = a^2\,t^2 + (a^2+b^2-(a-b)^2)\,t + b^2$

$$B^2 = (\alpha t+\beta)^2 = \alpha^2\,t^2 + (\alpha^2+\beta^2-(\alpha-\beta)^2)\,t+\beta^2$$

samt $(A-B)^2 = (\gamma t+\delta)^2 = \gamma^2\,t^2 + (\gamma^2+\delta^2-(\gamma-\delta)^2)\,t+\delta^2$, (der $\gamma = a-\alpha$ & $\delta = b-\beta$ & $T = t^2$).

Ex. 1. Begäres den föregående qvadraten i Ex. 4 medelst den tvåsiffriga tabellen; eller

$$\begin{array}{rr|l|l}
 & a & b & \qquad\alpha\;\beta \\
A = & 32 & 84 & B = 93|6 \quad A-B = 23|48,\; T = 10000 \\
a-b = & & 52 & \quad\pm 3| \;,\; \delta-\gamma = \quad 25 \\
\hline
 & 1024 & 7056 & 008649|36 \\
 & +80 & 80 & +111\,6 \quad (= 96^2-90^2) \\
 & -27 & 04- & \\
\hline
A^2 = & 1078 & 4656 & 008760\,96 = B^2 \\
 & +1166 & & 0752 \qquad = (A^2+B^2)\,T \\
 & - & 529 & 2304 \;- \\
 & - & 28 & 33\ldots \;- \quad = -(A-B)^2\,T \\
 & + & 6 & 25 \\
\hline
x^2 = & 1078 & 5270 & 773560\,96.
\end{array}$$

— Med en 5-siffrig tabell får man enligt denna formel lätt hela qvadraten på ett 20-siffrigt tal.

Ex. 2. Begäres (med Schulzes Tabell) qvadraten

$$(A + B)^2 = (758'463\,582'169)^2 = x^2 =$$
$$(295 \quad 413 = \text{diff.})$$

$$\begin{array}{rr|r|l}
 & 574'564'214'369 & 338'724 & 028'561 \\
A^2 = & 788\,933' & 367 & 285' \qquad\qquad = B^2 \\
 & -87\,025'- & -170 & 569'- \\
 & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
(A^2+B^2) = & & 914'186 & 866'930 \\
 & & -30'976 & 086'436 \;- \\
-(A-B)^2 = (176'294)^2 = & & -\quad 117 & 412' \quad - \\
 & & +\quad 13 & 924' \quad + \quad (= 118^2) \\
\hline
 & & 575'267'005'476 & 631'414\;744'561
\end{array}$$

eller i vanlig form (då ock 5-siffriga tabellen kan vara användbar, utsträckt till 6-siffrig)

$$\begin{array}{rr|l}
A^2 = & 575'266\,122'369 & 338'920\,744'561 = B^2 \\
A^2+B^2 = & 914'186 & 866'930 \\
-(A-B)^2 = & -\;31079 & 574'436 \;- \\
\hline
x^2 = & \multicolumn{2}{l}{575'267\,005'476\,631'414\,744'561.}
\end{array}$$

e) Särdeles kan qvadraten af tal med 3 gånger så många siffror, som i tabellen, t. ex. med 9 vid 3-siffrig tabell, fås enligt formlen (der $m = T^2$, t. ex. million, när T är tusend), $(am + bT + c)^2 = am^2 + (a^2+b^2-(a-b)^2)\,mT + (b^2+a^2+c^2-(a-c)^2)\,m + (b^2+c^2-(b-c)^2)\,T + c^2$, eller $(at^2+bt+c)^2 = a^2t^4 + (a^2+b^2-(a-b)^2)\,t^3 + b^2t^2 + (a^2+c^2-(a-c)^2)\,t^2 + (b^2+c^2-(b-c)^2)\,t + c^2$.

Ex. $t = 10000$, §

	$N^2 =$				
$\quad a \quad b \quad c$	a^2		b^2		c^2
$N = 7584 \mid 63\ 58 \mid 2169$	□ $5751^{V}7056^{IV}$	$4042'''$	$4164''$	$0470'$	4561
$(a-b=)$ 12 26 41 89 $(=b-c)$.	— . 150	$3076'''$	$1754''$	$7721'$	—
$a-c =$ 54 15 .	. —	$2932'''$	$2225'$	—	
$(a^2+b^2)\,t^3 + (b^2+c^2)\,t =$ . .	$+\ 9794^{IV}$	$1220'''$	$4512''$	$8725'$	+
$(a^2+c^2)\,t^2 =$	+	$6222'''$	$1617''$		
$N^2 =$	$5752^{V}6700^{IV}$	$5476'''$	$6314''$	$1474'$	4561.

Man kan ock afdela i 5-siffriga classer, då här dock blott 2 falla i första (= venstra) classen. Genom att på så sätt räkna med olika classering, blir man oberoende af möjliga fel i tabellen, och kan komma i tillfälle att upptäcka och rätta dem vid de använda talen. Vid att så räkna dubbelt efter olika formler, måste man naturligtvis erhålla samma facit, om de använda äro rätta.

Qvadrattalen ha ock en mängd *egenskaper*, hvarigenom de lätt kunna igenkännas och således föregående räkning pröfvas, nemligen:

1) Producten af 2:ne qvadrattal är ett qvadrattal (Ex. 4.9 = 36); men af ett qvadrattal och ett annat, är ej qvadrattal.

2) Qvadraten på ett udda tal är udda, ja ett öfver 8-falldigt (eller af formlen $8m+1$), och på ett jämnt är jämt, ja 4-falldigt; emedan ett jämt tal (t. ex. 14) är producten af 2 och något annat tal (14 = 2.7) och således (enl. 1) dess qvadrat är producten af 4 och en annan qvadrat. Och qvadraten på ett udda tal $(2n+1)$, är $4(n^2+n)+1$, och någon af factorna $n.(n+1)$ är jemn. (Ex. $7^2 = 49 = 6.8+1$, $14^2 = 196 = 2^2.7^2 = 4.49$). Ett udda tal, hvilket ej är af formen $8m+1$ är derföre ej qvadrattal. (Ex. 119 = 6.19 + 5).

3) De tvenne sista siffrorne i ett jämt qvadrattal böra derföre vara delbara med 4; äfvensom det bör kunna delas med 4 så ofta, tills quoten blir udda. Men ett *jämt qvadrattal* kan slutas endast på *4* eller *6*, eller 00, (emedan $2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $6^2 = 36$, $8^2 = 64$); och således, efter det är delbart med 4, antingen på 00, 04, 24, 44, 64, 84 eller 16, 36, 56, 76, 96; d. ä. om sista *siffran är 4, måste den föregående vara jemn; men om den sista är 6, så måste denna vara udda.* Ett jämt tal, som icke uppfyller dessa villkor, och särdeles det som slutas *på 2 eller 8*, är icke qvadrattal.

4) Ett qvadrattal som slutas på 0, måste ha till rot ett tal, som slutas på 0; men då detta är delbart med 10, måste dess qvadrat vara delbar med 100, och således slutas på 00. Ett tal, som slutas på 0, men ej på 00, är ej qvadrattal.

5) Ett udda tal, som är qvadrat, måste slutas på 1, 5 eller 9, d. ä. på ± 1 eller 5. (Ty udda qvadrater ($<$ 100) äro endast 1, 9, 25, 49, 81). De derföre, som slutas på 3 eller 7, äro ej qvadrattal. Ett tal, som slutas på 5, kan endast